

文章编号: 1006-6616 (2002) 01-0079-08

基于应变梯度理论的韧性剪切带理论研究

王学滨¹, 潘一山¹, 马瑾²

(1. 辽宁工程技术大学力学系, 辽宁 阜新 123000;

2. 中国地震局地质研究所 北京 100029)

摘要:地质领域中存在的大量事实都可以归为应变局部化范畴, 韧性剪切带是剪切应变局部化带。本文首次应用应变梯度塑性理论对韧性剪切带进行了理论分析。获得了韧性剪切带内部局部剪应变(率)分布规律, 剪切带错动总位移及剪切带法向位移的理论表达式, 以及韧性剪切带内部体积应变(率)和孔隙率分布规律。剪应变局部化导致了体积应变和孔隙率局部化。随着应变软化的加剧, 剪应变、体积应变和孔隙率局部化加剧; 随着应力率绝对值的增加, 剪应变率、体积应变率集中程度增强。

关键词:应变局部化; 韧性剪切带; 应变梯度塑性理论; 剪应力(率); 体积应变(率); 空隙率

中图分类号: P542

文献标识码: A

0 引言

国际上, 在非线性固体力学的研究中, 应变局部化和剪切带等问题已成为研究的热点问题之一。应变局部化现象可以看作延性和脆性破坏的前兆, 随后便出现裂纹的扩展。具有强烈剪切变形的窄带称之为剪切带。剪切带或应变局部化现象可以在黑色金属、有色金属、聚合物、韧性单晶体、韧性多晶体、结构钢、饱和粘土、岩石、混凝土、陶瓷等材料中观测到; 自然界中存在多种局部化现象, 本文仅限于应变局部化范畴。

地质领域中存在的大量事实可以归为应变局部化范围: 如层面上的棋盘格式节理, 等距性的结构面(节理、劈理、断层、大陆断裂和洋底断裂)^[1], 地壳现代破裂网络、具有两组方向的格子状水系^[2], 主要受岩石圈下层塑性流动网络控制呈条带状和网络状分布的地震^[3], 多孔岩石中的扁平压缩带^[4], 韧性剪切带, 脆性剪切带及脆-韧性剪切带等等。

韧性剪切带是地壳中深层次的主要构造类型之一, 是岩石在塑性状态下发生连续变形的狭长高应变带, 应变带中心剪应变最大, 目前在地质领域, 对剪切带内应变分布规律和剪切

收稿日期: 2001-09-06

基金项目: 中国地震局地质研究所构造物理开放实验室资助(编号: LTP0003)

作者简介: 王学滨(1975-), 男, 硕士, 助教, 1998年毕业于辽宁工程技术大学, 现从事岩石力学理论研究和岩土工程的数值计算工作。

带错动总位移仅进行了定性的分析^[5~7]。

本文首次应用应变梯度塑性理论对韧性剪切带进行了理论分析。

1 一维二阶剪切应变梯度格式导出

连续介质应变梯度模型可由连续介质非局部模型通过泰勒级数展开而获得。由于微结构之间存在相互作用且其影响范围广,导致材料一点的应力不仅取决于该点的状态,而且还取决于与该点临近的诸多点的状态。根据 Kroner、Eringen 和 Edelen 提出的早期非局部模型^[8]:非局部塑性剪应变 $\bar{\gamma}^p$ 可以表达为其本身所对应的参数 γ^p 的加权平均,该计算在 y 周围长度为 L 的邻域内进行,对于本文的一维问题而言: $L = (-\infty, +\infty)$

$$\bar{\gamma}^p = \frac{1}{L} \int_L g(\zeta) \gamma^p(y + \zeta) d\zeta \quad (1)$$

式中 ζ 为从点 y 到其邻域内任一点的距离; $g(\zeta)$ 代表某一权函数,它随 ζ 至 y 距离的增加而单调下降,微结构相互作用的广泛程度由权函数中所包含的内部长度参数决定。

将 $\gamma^p(y + \zeta)$ 在 y 点采用泰勒级数展开并代入式(1),并考虑到各向同性假设,可以将各奇次项消去,仅保留前二项可以得到

$$\bar{\gamma}^p = \sum_{n=0}^{\infty} \int_L \frac{g(\zeta)}{n! L} \cdot \frac{d^n \gamma^p(y)}{dy^n} \zeta^n d\zeta \quad (2)$$

取非局部权函数^[9]为

$$g(\zeta) = e^{-\frac{\zeta^2}{2l^2}} \quad (3)$$

令 $l^2 = l_c^2/2$, l 称之为材料内部长度参数,一般认为其值与材料的平均颗粒直径有关,材料平均颗粒直径越大,则材料内部长度参数越大,意味着材料微结构之间相互作用的范围越广。将式(3)代入式(2)经过积分运算可得

$$\bar{\gamma}^p = \gamma^p(y) + l^2 \frac{d^2 \gamma^p(y)}{dy^2} \quad (4)$$

可见非局部塑性剪应变 $\bar{\gamma}^p$ 不仅和局部塑性剪应变 γ^p 有关,而且还和其二阶应变梯度有关。将上式中 $\bar{\gamma}^p$ 替代传统本构模型的 γ^p ,就可以在传统塑性理论框架之内考虑应变梯度效应。

2 局部剪应变(率)分布规律

假设两端受剪应力作用的岩石当剪切应力超过峰值强度后,在岩石内部将发生剪切变形局部化,即在岩石内部存在强烈的不均匀的剪切变形条带,我们仅以剪切带为研究对象(图1)。 w 为发生局部化变形的岩石宽度, d 为剪切带错动总位移, $d = 2s_1$, 线段 AB 中点设为 O , 建立坐标系 OY 。

假设岩石材料剪应力与剪应变的本构关系如图2所示,剪切弹性模量和剪切降模量分别为 G 和 λ , $\lambda > 0$, τ_c 为剪应力峰值强度, γ_c 为其所对应的剪应变。剪切带内部的岩体在剪应力 τ 的作用下,达到剪应力峰值强度之后将发生剪切屈服,将其简化为沿剪切带法向的一维问题。根据传统塑性理论可以得到流动剪切应力 $\bar{\tau}$ 与塑性剪切应变 γ^p 的关系为^[10]

$$\bar{\tau} = \tau_c - c\gamma^p \quad (5)$$

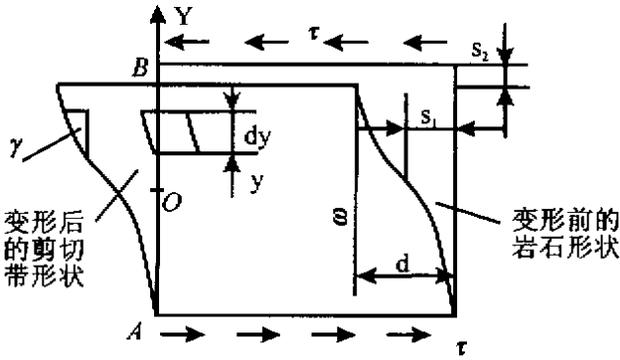


图 1 局部化后剪切带形状

Fig.1 The form of shearing bands after localization

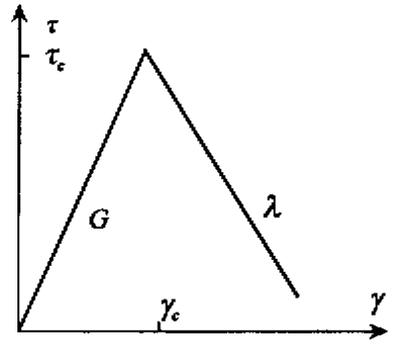


图 2 剪应力和剪应变的本构关系

Fig.2 Shear stress-shear strain constitutive relationship

式中 $c = \frac{G\lambda}{G + \lambda}$, $\bar{\tau} = \tau$ 。将式 (5) 中 γ^p 用式 (4) 中 $\bar{\gamma}^p$ 替代, 可以得到

$$\bar{\tau} = \tau_c - c \left(\gamma^p + l^2 \frac{d^2 \gamma^p}{dy^2} \right) \tag{6}$$

可以解出式 (6) 非齐次常数系数微分方程的通解和所对应的齐次方程的特解, 考虑到 γ^p 是坐标 y 的偶函数, 故需将通解中的非对称项消去, 再利用弹性区与剪切塑性区交界处的边界条件: 在 $y = \pm w/2$ 时, $\gamma^p = 0$, 故可解得

$$\gamma^p = \frac{\tau_c - \tau}{c} \left[1 - \cos\left(\frac{y}{l}\right) / \cos\left(\frac{w}{l}\right) \right] \tag{7}$$

我们仅关心塑性剪切应变达到最大值时的剪切带宽度^[11], 即: $d\gamma^p/dw = 0$, 可以得到剪切带宽度 w 的最小非零解为 $w = 2\pi l$ 。故式 (7) 可以简化为

$$\gamma^p = \frac{\tau_c - \tau}{c} \left[1 + \cos\left(\frac{y}{l}\right) \right] \tag{8}$$

剪应变 $\gamma = \gamma^e + \gamma^p$, 其中 $\gamma^e = \tau/G$, 因此剪应变可以表示为

$$\gamma = \frac{\tau}{G} + \frac{\tau_c - \tau}{c} \left[1 + \cos\left(\frac{y}{l}\right) \right] \tag{9}$$

根据式 (9), 剪应变率 $\dot{\gamma}$ 可以表示为

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\dot{\tau}}{c} \left[1 + \cos\left(\frac{y}{l}\right) \right] \tag{10}$$

式中, $\dot{\tau}$ 为剪应力率, 在应变软化阶段: $\dot{\tau} \leq 0$

3 剪切带错动总位移及剪切带法向位移计算

假设岩石单元变形前、后体积保持不变, 且不考虑岩石单元厚度的变化, 将图 1 中岩石单元局部放大 (图 3), 选取的岩石单元 (微元体) 原始形状为正方形 (在所研究的平面内), 边长为 dy 。在微元体内部可以认为剪切变形是均匀的。在剪应力 τ 的作用下, 微元体在与剪应力垂直的方向上将缩短, 由于微元体在所研究的平面内面积保持不变, 故在与剪应

力平行的方向上微元体将被拉长。且假设微元体变形前后有 $CD = CE$ 。由于有

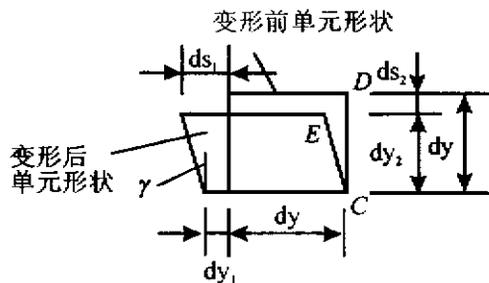


图3 微小单元体的变形

Fig.3 The deformation of minute element body

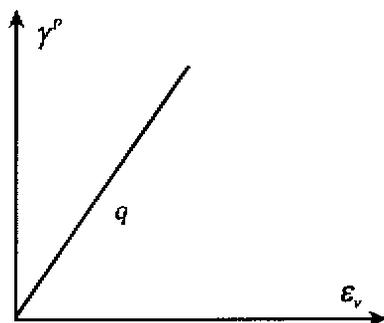


图4 塑性剪应变与体积应变的关系

Fig.4 The relation of plastic shear strain and volumetric strain

$$dy_2 = \cos(\gamma^e + \gamma^p) dy \quad (11)$$

$$dy dy = (dy + dy_1) dy_2 \quad (12)$$

因此可以得到

$$dy_1 = \{ [\cos(\gamma^e + \gamma^p)]^{-1} - 1 \} dy \quad (13)$$

$$s_2 = 2 \int ds_2 = 2 \int_0^{w/2} [1 - \cos(\gamma^e + \gamma^p)] dy \quad (14)$$

$$d = 2s_1 = 2 \int ds_1 = 2 \int_0^{w/2} [\sin(\gamma^e + \gamma^p) + \{ \cos(\gamma^e + \gamma^p) \}^{-1} - 1] dy \quad (15)$$

4 体积应变(率)和空隙率分布规律

大量实验结果表明:岩石材料的剪胀特性在低围压时非常明显,尤其是在剪胀点之后。假设达到剪应力峰值强度后, $\gamma^p - \epsilon_v$ 的关系呈线性,直线斜率的绝对值为 q , ϵ_v 为体积应变(图4)。这一假设的含义是:不考虑弹性阶段岩石体积的变化,即弹性剪应力不引起岩石体积的变化,应变局部化后由于微裂纹的萌发、发展及连通,因此有必要考虑剪应力峰值强度后的岩石材料的剪胀特性。根据图4有

$$\epsilon_v = \gamma^p / q \quad (16)$$

因此根据式(8),且令 $f(\gamma) = [1 + \cos(\gamma/l)] / (qc)$,可以得到

$$\epsilon_v = (\tau_c - \tau) f(\gamma) \quad (17)$$

体积应变率可以表示为

$$\dot{\epsilon}_v = -\dot{\tau} f(\gamma) \quad (18)$$

假设岩石材料的初始孔隙率为 n_0 ,由于变形局部化剪胀引起的附加孔隙率设为 n_1 ,由于 ϵ_v 为体积增量与原有岩石体积的比值,产生剪胀是由于裂隙萌发、发展和贯通,引起岩石孔隙率在其原有值的基础上进一步增加,根据孔隙率的定义,其增加值即为岩石的体积应

变，即 $n_1 = \epsilon_v$ ，因此岩石材料的实际孔隙率 n 为

$$n = n_0 + (\tau_c - \tau)(y) \tag{19}$$

5 算例及结果分析

5.1 局部剪应变（率）分布规律

岩石材料内部参数 $l = 0.006\text{m}$ ；弹性剪切模量 $G = 20\text{GPa}$ ，剪切降模量 $\lambda = 10\text{GPa}$ ，峰值剪应力 $\tau_c = 20\text{MPa}$ 。由不同剪应力时的剪切带内部的剪应变有其演化的规律（图 5a）可见：

- ①剪应力越小，即岩石应变软化越严重，剪切带内部的剪应变的分布规律越陡峭；
- ②剪切带中部的剪应变最大，边缘最小，中部与边缘地剪应变比值随应变软化加剧而增加；
- ③强烈的不均匀的剪应变集中在剪切带内部，即在剪应力峰值点之后发生剪应变局部化现象；
- ④剪节带内部的弹性剪应变为均匀分布，塑性剪应变的不均匀是剪切带内部的不均匀剪应变分布规律的根源，应变软化越严重，塑性剪应变占全部剪应变的比例越大；
- ⑤理论上的剪切带内部应变分布规律与文献^[5-7]示意图的规律是一致的。

由不同剪应力率时的剪切带内部的剪应变率的演化规律（图 5b）如下：

- ①剪应力率的绝对值越大，即应变软化越快，则剪切带内部的剪应变率分布规律越陡峭，剪应变率局部化现象越明显；
- ②在剪切带中部剪应变率最大，边缘最小，随着剪应力率的增加，剪切带中部和边缘剪应变率的比值越大；
- ③剪切带内部的弹性剪应变率为均匀分布，塑性剪应变率的不均匀是剪切带内部的不均匀剪应变率的根源。

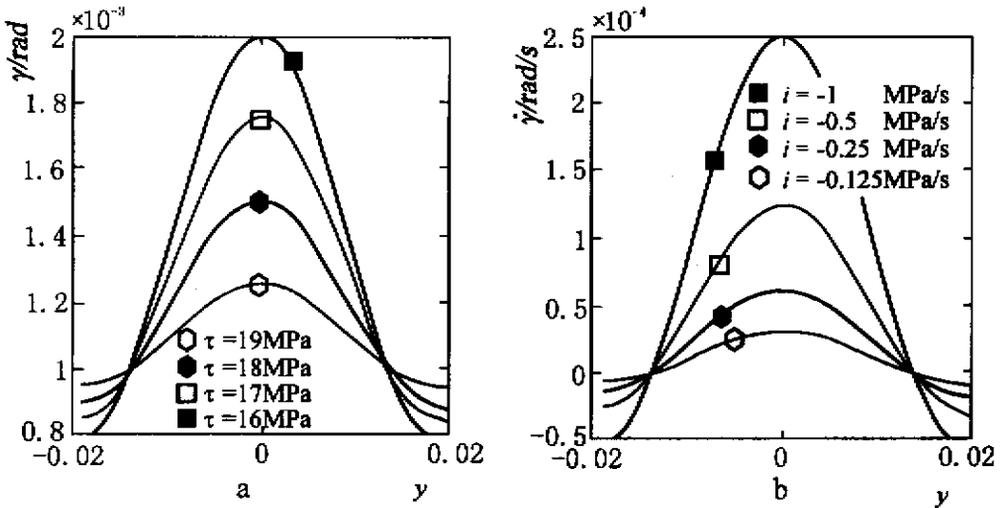


图 5 剪应变和剪应变率在剪切带内部的分布规律

Fig.5 The regularities of the shear strain and the ratio of shear strain in the shearing bands

5.2 剪切带错动总位移及剪切带法向位移

弹性剪切模量 $G = 20\text{GPa}$ ，剪切降模量 $\lambda = 10\text{GPa}$ ，峰值剪应力 $\tau_c = 20\text{MPa}$ 。岩石不同材料内部参数时的剪切带法向变形量和剪切带错动总位移量分别见图 6 的 a 和 b。由图可见：

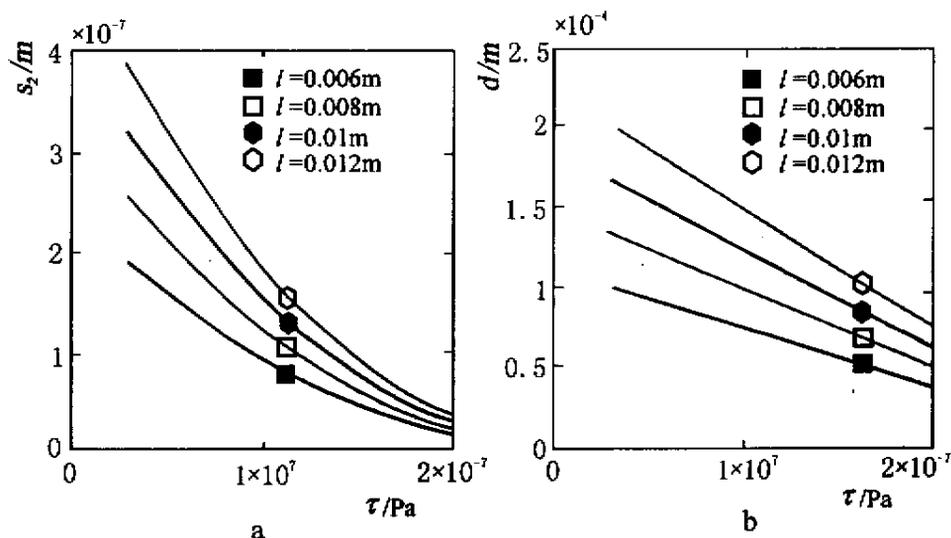


图6 剪切带位移随内部长度变化规律

Fig.6 The regularity of the displacement of the shearing bands and the internal length

①在应变软化的过程中，剪切带法向变形量和剪切带错动总位移量均增加；随剪应力的降低，剪切带法向变形量增加趋势加快；随剪应力的降低，剪切带错动总位移量增加趋势几乎不变；②剪切带错动总位移量远远大于剪切带法向变形量，因此两者比较而言后者可以忽略，剪切带的变形主要是剪切带方向的滑移（错动）变形量。

5.3 体积应变（率）和空隙率分布规律

岩石材料内部参数 $l = 0.006\text{m}$ ；弹性剪切模量 $G = 20\text{GPa}$ ，剪切降模量 $\lambda = 10\text{GPa}$ ，峰值剪应力 $\tau_c = 20\text{MPa}$ ， $q = 0.5$ 。在剪切带内部，不同剪应力时的体积应变和不同剪应力率时的体积应变率的演化规律见图7的a和b。可见：①由于考虑了岩石的剪胀特性，不仅剪应变局部化，在剪切带内部体积应变也局部化，剪切带内部剪胀程度随剪应力的降低和剪应力率的增加而加大，剪切带边缘的岩石微元体体积不发生变化；②剪切带中部的剪胀程度最大，最终岩石将在这一位置被剪切破坏。

其他参数同上，初始孔隙率取为 $n_0 = 0.005$ 。由不同剪应力时的孔隙率的演化规律（图7c）可见：①随剪应力的降低，剪切带内部孔隙率增加，这是由于剪胀而引起的裂纹萌发、扩展和连通的结果；②剪切带中部较剪切带边缘的孔隙率大得多，中部这一位置的岩石损伤最严重，承载能力最小，最终这一位置的岩石将彻底失去抵抗剪切变形的能力，韧性剪切带将转变为脆性剪切带，两盘沿界面（断裂面或不连续面）发生相对滑动；③剪应变局部化导致了体积应变局部化和孔隙率局部化，剪应变局部化的位置是将来岩石材料破坏的位置。

6 结论

本文首次应用应变梯度塑性理论对韧性剪切带进行了理论分析。获得了韧性剪切带内部局部剪应变、局部剪应变率分布规律；获得了剪切带错动总位移及剪切带法向位移的理论表达式；获得了韧性剪切带内部体积应变、体积应变率和孔隙率分布规律。计算结果表明：

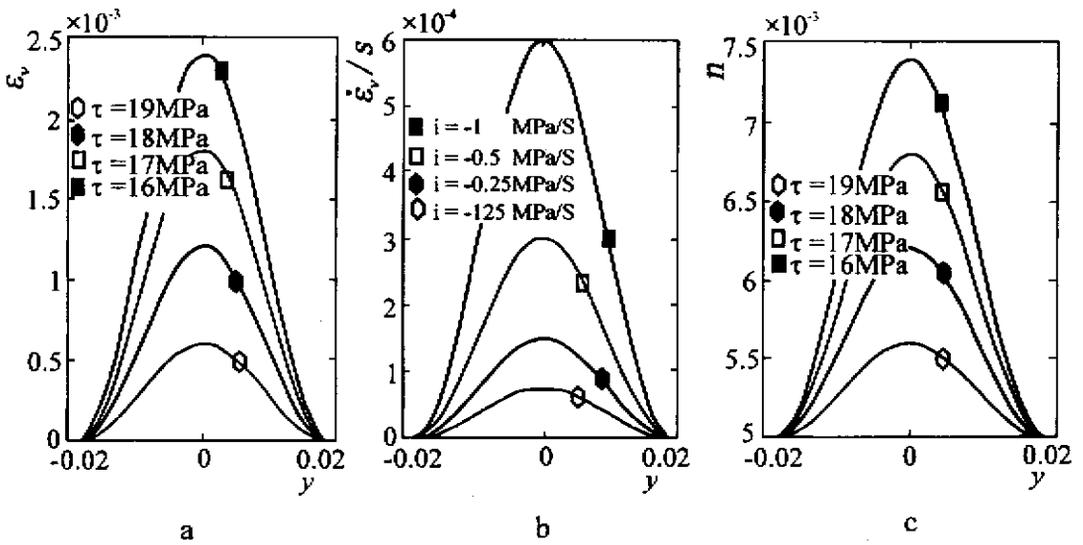


图 7 体积应变、体积应变率和孔隙率在剪切带内部的分布规律

Fig.7 The regularities of the volumetric strain , the ratio of volumetric strain and the ratio of hole in the shearing bands

(1) 剪应变局部化导致了体积应变局部化和孔隙率局部化，剪应变局部化的位置就是将来破坏的位置。

(2) 随着应变软化的加剧，剪应变局部化、体积应变局部化和孔隙率局部化加剧；

(3) 随着应力率的增加，剪应变率、体积应变率集中程度加强；

(4) 剪切带的变形主要是剪切带方向的滑移（错动）变形量。

本文为韧性剪切带的定量分析提供了一种方法。

参 考 文 献

- [1] 孙广忠. 岩体结构力学 [M]. 北京：科学出版社，1988.
- [2] 丁国瑜, 李永善. 我国地震活动与地壳现代破裂网络 [J]. 地质学报, 1979, 22 ~ 34.
- [3] 王绳祖. 亚洲大陆岩石圈多层构造模型和塑性流动网络 [J]. 地质学报 1993, 67 (1): 1 ~ 18.
- [4] Olsson W A. Theoretical and experimental investigation of compaction bands in porous rock [J]. Journal of Geophysical Research. 1999, 104 (B4): 7219 ~ 7228.
- [5] C. H. Scholz 著. 马胜利等译. 地震与断层力学 [M]. 北京：地震出版社，1996.
- [6] 朱志澄, 宋鸿林主编. 构造地质学 [M]. 武汉：中国地质大学出版社，1990.
- [7] J. G. 兰姆塞, M. I. 胡伯著. 徐树桐主译. 现代构造地质学方法 [M]. 北京：地质出版社，1991.
- [8] Ellen K, Ekkehard R, de Borst R. An anisotropic gradient damage model for quasi-brittle materials [J]. Comput. Methods Appl. Engrg. 2000, 183 : 87 ~ 103.
- [9] Askes H, Pamin J. Dispersion analysis and element-free galerkin solutions of second-and fourth-order gradientenhanced damage models [J]. International journal for numerical methods in engineering , 2000, 49 : 811 ~ 832.
- [10] 王仁, 熊祝华, 黄文彬. 塑性力学基础 [M]. 科学出版社，1982.
- [11] De Borst R. Gradient-dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects [J]. International for Solids and Structures , 1992, 35 : 521 ~ 539.

A THEORETICAL STUDY ON DUCTILE SHEARING BANDS BASED UPON STRAIN GRADIENT PLASTICITY THEORY

WANG Xue-bin¹, PAN Yi-shan¹, MA jin²

(1. *Dept. of Mechanics and Engineering Sciences, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China;*

2. *Institute of Geology, China Seismological Bureau, Beijing 100029, China*)

Abstract : Many usual phenomena in the realm of geology can be seen as strain localization. Ductile shearing bands are shearing strain localization bands. In the first time, a theoretical study on ductile shearing bands based upon strain gradient plasticity theory is conducted in this paper. The regularities of the shear strain and the ratio of shear strain in the shearing bands are got. The theoretical formulas about the displacement of the shearing bands in the two perpendicular directions are obtained. Besides, the regularities of the volumetric strain and the ratio of volumetric strain in the shearing bands are also got. The strain localization causes volumetric strain localization and the localization of porosity factor. If the strain softening intensifies, the shear strain and the volumetric strain localization intensify. Along with the increase of absolute ratio of shear stress, the intensive extent of ratio of shear strain and volumetric strain intensifies.

Key words : strain localization ; the ductile shearing bands ; strain gradient plasticity theory ; (the ratio of) shear strain ; (the ratio of) volumetric strain ; porosity factor