

文章编号：1006-6616(2001)03-0265-06

# 考虑围压及孔隙压力的岩石试件 应力与应变关系解析

王学滨，潘一山

(辽宁工程技术大学力学系，辽宁 阜新 123000)

**摘要：**假设剪切带内部的岩体为剪切破坏，利用剪切应变梯度塑性理论，解析得出了考虑围压和孔隙压力的岩石试件应力与应变的关系，解析解与众多的实验研究结果比较一致，围压效应和孔隙压力效应是局部化所致，这一研究结果对于自然灾害的防治有一定的理论和实际意义。

**关键词：**应变梯度塑性理论；剪切破坏；围压；孔隙压力；局部化

中图分类号：P584

文献标识码：A

## 0 引言

近年来，在非线性的固体力学研究中，局部化、分叉、稳定性和剪切带等问题已成为研究的热点问题之一。局部化现象（变形局部化、温度局部化、孔隙压力局部化、损伤局部化和相变局部化等）是材料不稳定性的重要表现形式，是材料破坏的先兆，在金属材料、复合材料和地质材料中都可以观测到<sup>[1]</sup>。国际上对变形局部化的研究相当活跃，国内目前开展这方面的研究工作还较少。在能源的开发和利用中，一些自然灾害，如地震、煤矿冲击地压、水电洞室岩爆、煤和瓦斯突出、边坡雨季滑坡、油井抽注水地震及砂土湿化等，严重影响了能源工业的正常健康发展，开展变形局部化的理论研究对这些灾害的机理分析和控制可望提供新的思路<sup>[2,3]</sup>。

正确认识煤岩在围压和孔隙压力作用下的本构关系，对于能源开发和利用中防治自然灾害非常有利。若仅考虑孔隙流体的力学作用对岩石强度的影响，岩石强度将随孔隙压力的增加而降低，弹性模量随孔隙压力的增加而衰减。不仅如此，孔隙流体对煤岩体的峰值后力学响应也产生重大影响，孔隙压力增加，峰值后曲线变陡，软化特性增加。通常，围压和孔隙压力对岩石特性的影响刚好相反<sup>[4]</sup>。目前，关于围压和孔隙压力对煤岩本构关系影响的研究还仅限于实验研究方面，对此采用传统的本构关系理论进行描述还存在很大困难，局部化理

收稿日期：2001-02-26

基金项目：2000年国家教委骨干教师项目：“地震及水渗流作用下大型岩体工程稳定性研究”

作者简介：王学滨（1975—），男，硕士，1998年毕业于辽宁工程技术大学，现从事岩石力学理论研究及岩土工程的数值计算。

论可以较好的模拟尺寸效应<sup>[5~8]</sup>。本文首次尝试了采用剪切应变梯度塑性理论，解析得出了考虑围压和孔隙压力效应的岩石试件应力与应变的关系，解析解与众多的实验结果比较一致。

### 1 考虑围压和孔隙压力的岩石试件的剪切塑性应变梯度模型

假设岩石试件两端受压应力  $\sigma$  作用，侧面受围压  $p$  作用，试件内部的孔隙压力为  $p_1$ ，侧面的孔隙压力为 0。当剪切应力超过抗剪强度后，在试件内部产生与轴向压力  $\sigma$  方向呈倾角为  $\alpha$  的稳定的平直剪切带，其宽度为  $w$ 。假设剪切带内部的岩体为剪切破坏，剪切带外部的岩体为弹性体，剪切滑动受控于与剪切带法向正应力  $\sigma'$  相垂直的剪力  $\tau$ 。假设剪切带边缘受到的外部弹性岩体的作用力为均匀分布，即  $\sigma'$  和  $\tau$  均为常量。试件各部分尺寸及剪切带上部的弹性体的受力分析如图 1 所示（ $L$  为岩石试件高度， $A_0$  为岩石试件宽度）。在受力分析时，不考虑剪切带外部岩石的变形，即将其作为刚体来考虑，孔隙压力  $p_1$  仅对斜截面上的正应力产生直接影响。 $\alpha_p$  为孔隙压力系数，其值为常数。

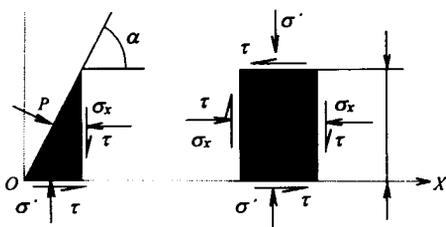


图 1 岩石试件各部分尺寸及受力分析

Fig.1 Size of rock specimen and stress analysis

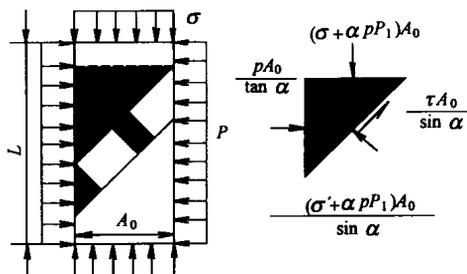


图 2 边缘单元体、内部单元体的受力分析

Fig.2 Stress analysis of external and internal element body

通过在所研究的平面内建立两个方向的平衡方程，可以解得斜截面上的剪应力为

$$\tau = 0.5(\sigma - p + \alpha_p p_1) \sin(2\alpha) \tag{1}$$

剪切带可以划分为两个剪切带边缘单元体和若干个剪切带内部单元体，分别考虑任一剪切带边缘单元体和剪切带内部任一单元体的受力平衡（图 2）。假设岩石剪力与剪应变的本构关系如图 3 所示（图中  $\tau$  为剪应力； $r$  为剪应变； $\tau_c$  为抗剪强度； $r_c$  为对应的剪应变； $\lambda$  为降模量； $G$  为剪切弹性模量）。剪切带内部的岩体在剪应力  $\tau$  的作用下，将发生剪切屈服。将其简化为沿剪切带法向的一维问题，以剪切带中心线上的点为圆心，建立坐标系  $OY$ ，如图 4 所示。

在剪切带内考虑岩石的二阶剪切塑性应变梯度，取剪切屈服函数为

$$f = \tau - \bar{\tau} \left( \gamma^p, l^2 \frac{d^2 \gamma^p}{dy^2} \right) = 0 \tag{2}$$

式中  $\bar{\tau}$  为流动剪切应力， $l$  为岩石材料内部参数， $\gamma^p$  为剪切塑性应变， $y$  为坐标。假设岩石强度超过剪切峰值后按线性规律软化，一般认为  $l$  值的大小和材料的平均颗粒直径有关。例如，混凝土的内部参数要大于砂岩。假设流动剪切应力  $\bar{\tau}$  与二阶剪切塑性应变梯度呈线性，则：

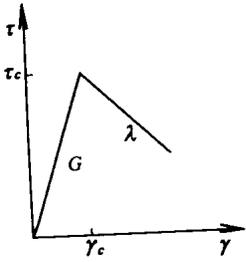


图 3 岩石的本构关系  
Fig.3 Constitutive relation of rock

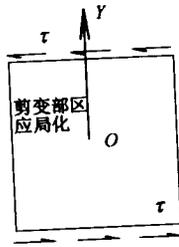


图 4 坐标系选取  
Fig.4 The coordinate system chosen

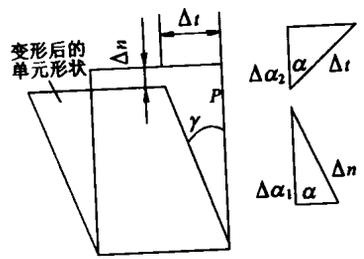


图 5 剪切应变引起的位移  
Fig.5 Displacement caused by shear strain

$$\bar{\tau} = \tau_c - c\gamma^p - cl^2 \frac{d^2\gamma^p}{dy^2} \quad (3)$$

式中， $c = \frac{G\lambda}{G + \lambda}$ ， $\tau_c = 0.5(\sigma_c - p + \alpha_p p_1) \sin(2\alpha)$ ， $\tau - \bar{\tau} = 0$ ，不考虑  $\tau_c$  的变化，即其值不随  $\sigma_c$ 、 $p$  和  $\alpha$  而改变。解出式 (3) 非齐次常数系数微分方程的通解，考虑到剪切塑性应变是坐标  $y$  的偶函数，故需将通解中的非对称项消去，再利用弹性区与剪切塑性区交界处的边界条件：在  $y = \pm w/2$  时， $\gamma^p = 0$ ，故可解得

$$\gamma^p = \frac{\tau_c - \bar{\tau}}{C} \left[ 1 - \cos \frac{y}{l} / \cos \frac{w}{2l} \right] \quad (4)$$

假设剪切带的宽度 ( $w$ ) 为剪切塑性应变达到最大值时的宽度，可以得到剪切带的宽度为： $w = 2\pi l$ ，定义剪切带内沿剪切带法向平均塑性剪切应变  $\bar{\gamma}^p$  为

$$\bar{\gamma}^p = 2 \int_0^{\frac{w}{2}} \gamma^p dy / w = \frac{\tau_c - \tau}{c} \quad (5)$$

考虑图 5 的变形后单元的理想形状，流动剪应力引起剪切带内岩体沿剪切带法向的位移增量设为  $\Delta n$ ，故由剪切带法向位移增量而引起的岩体沿岩体轴向的位移增量  $\Delta\alpha_1$  可以表示为

$$\Delta\alpha_1 = \Delta n \sin\alpha = u(1 - \cos\bar{\gamma}^p) \sin\alpha \quad (6)$$

同理，剪切带内岩体将沿剪切带的走向发生相对滑移，设岩体沿岩体轴向的位移增量为  $\Delta\alpha_2$ ，则有

$$\Delta\alpha_2 = \Delta t \cos\alpha = w \sin\bar{\gamma}^p \cos\alpha \quad (7)$$

实际上，在软化阶段剪切带内岩体（尤其是剪切带中部）将被严重破坏或损伤（压碎、滑移）形成裂纹和孔隙，将改变理想的轴向位移增量，因此，我们假定实际的轴向位移增量  $\Delta\alpha$  有如下形式

$$\Delta\alpha = k_1 u(1 - \cos\bar{\gamma}^p) \sin\alpha + k_2 w \sin\bar{\gamma}^p \cos\alpha \quad (8)$$

式中，常数  $k_1$  和  $k_2$  为校正系数，二者均大于零，是为了校正实际情况中不容易以数学表达式确定的多种因素对轴向位移增量  $\Delta\alpha$  的影响。从式 (8) 可以看出，①在剪应力峰值点， $w = 0$ ， $\bar{\gamma}^p = 0$ ， $\Delta\alpha = 0$ ，即式 (8) 可以满足软化应力应变曲线与弹性阶段曲线的连续性；②岩石软化愈严重，即  $\bar{\gamma}^p$  越大， $\Delta\alpha$  越大。这两点推论的正确性是显而易见的，故式 (8) 所含的两项因子的具体表达式也是合理的。图 2 中与  $\sigma_x$  垂直的剪应力不引起剪切带内岩体沿剪切带法向的位移变化，故对岩石试件的轴向位移没有影响，也不考虑  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  对轴向的位

移增量的影响。假设单轴压缩的轴向弹性应变引起的轴向位移增量  $\Delta e$  可以近似表达为

$$\Delta e = (\sigma - \nu p + \alpha_p p_1) L / E \quad (9)$$

式中  $\nu$  为泊松比,  $E$  为弹性模量。因为总轴向位移增量  $\delta$  与总轴向应变  $\epsilon$  有如下关系

$$\epsilon = \delta / L = (\Delta e + \Delta \alpha) / L \quad (10)$$

故, 可以得到软化段的应力和应变满足如下关系

$$\epsilon = [k_1(1 - \cos \bar{\gamma}^p) \sin \alpha + k_2 \sin \bar{\gamma}^p \cos \alpha] w / L + (\sigma - \nu p + \alpha_p p_1) / E \quad (11)$$

在应力峰值点, 式(11)可以蜕化为:  $\epsilon = (\sigma - \nu p + \alpha_p p_1) / E$

## 2 算例及结果分析

参数取值如下: 剪切带倾角  $\alpha = 30^\circ$ , 材料内部参数  $l = 0.007\text{m}$ , 剪切模量  $G = 0.5\text{GPa}$ , 剪切降模量  $\lambda = 0.5\text{GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.25$ , 抗剪强度  $\tau_c = 10\text{MPa}$ ,  $k_1 = 200$ ,  $k_2 = 2$ , 试件高度为  $10\text{cm}$ ,  $\alpha_p = 1$ 。方案一, 模拟孔隙压力为  $0$ , 围压  $p$  分别取为:  $0, 3\text{MPa}, 5\text{MPa}, 10\text{MPa}$  和  $20\text{MPa}$ , 模拟结果见图 6a。方案二, 模拟孔隙压力为  $3\text{MPa}$ , 围压  $p$  分别取为:  $0, 3\text{MPa}, 5\text{MPa}, 10\text{MPa}$  和  $20\text{MPa}$ , 模拟结果见图 6b。方案三, 模拟围压为  $0$ , 孔隙压力  $p_1$  分别取:  $0, 1\text{MPa}, 3\text{MPa}, 5\text{MPa}$  和  $7\text{MPa}$ , 模拟结果见图 6c。方案四, 模拟围压为  $5\text{MPa}$ , 孔隙压力  $p_1$  分别取:  $0, 1\text{MPa}, 3\text{MPa}, 5\text{MPa}$  和  $7\text{MPa}$ , 模拟结果见图 6d。

由图 6a、b 可见, 在孔隙压力一定的前提下, 围压较高时, 试件具有较高的弹性模量、抗压强度及与之对应的轴向应变。在软化阶段, 在相同轴向压应力的情况下, 围压越高, 软化段曲线越缓; 围压较高的软化段曲线和围压较低的软化段曲线相比, 总体趋势较平缓, 增加围压, 应力峰值点后移。图 6c、d 可见, 在围压一定的前提下, 孔隙压力越大, 抗压强度和弹性模量越小, 软化段曲线越陡; 增加孔隙压力, 应力峰值点不后移, 软化段的本构关系并非直线, 这也与众多的实验结果是一致的。以上几点都可以从大量的实验结果<sup>[4,9]</sup>中找到佐证。该模型较好的解释了岩石试件压缩剪切破坏的围压效应和孔隙压力效应, 二者固然可能和多种因素有关, 但本文上述解析认为, 变形局部化塑性软化区的存在是引起围压效应和孔隙压力效应的前提条件之一, 即局部化是产生围压效应和孔隙压力效应的原因。

应当指出: 图 3 为岩石单元的本构关系, 形状不受试样尺寸、加载条件和实验条件等诸多因素的影响; 式(11)为岩石试样软化段的应力和应变关系, 是岩石单元的本构关系、试样尺寸和加载条件等因素的共同作用结果。

## 3 结论

在假设剪切带内部的岩石为剪切破坏的前提下, 本文首次尝试了采用剪切应变梯度塑性理论, 解析得出了考虑围压和孔隙压力效应的岩石试件应力与应变的关系, 解析解和众多的实验研究结果比较一致, 较好的解释了岩体试件的围压效应和孔隙压力效应, 同时说明围压效应和孔隙压力效应是由局部化所致。

本文的解析解广泛适用于大多数天然岩体、煤岩和人工材料, 如混凝土等, 算例中的参数取值并非特指, 模拟结果具有广泛意义。不同材料主要通过不同的力学参数予以反映。

若要考虑更多的因素, 作更细致的工作还有待进一步努力。虽然如此, 本文所作的若干假设下的理论计算仍得到了比较合理的结果, 这说明所作的有关假设和所采取的处理方法是

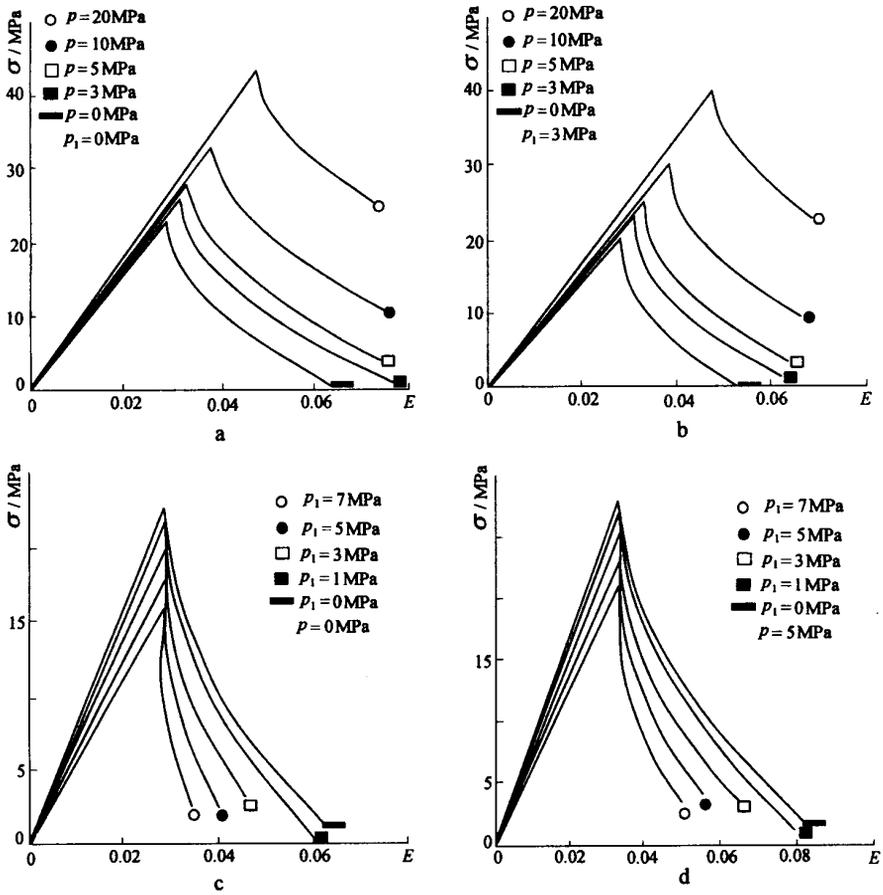


图 6 岩石试件围压效应和孔隙压力效应

Fig.6 The effect of confining and pore pressure of rock specimen

合理的，为进一步研究提供了初步的理论依据。

参 考 文 献

[ 1 ] 陆明万, 罗学富, 郑长卿. 计算细观力学进展 [ A ]. 黄克智, 徐秉业主编. 固体力学发展趋势 [ C ]. 北京: 北京理工大学出版社, 1994, 196 ~ 215.

[ 2 ] 潘一山. 岩土材料分叉与变形局部化研究 [ A ]. 岩土工程青年专家学术论坛文集编委会主编. 岩土工程青年专家学术论坛文集 [ C ]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1998. 51 ~ 58.

[ 3 ] 潘一山. 岩土材料分叉分析及其在能源工程中的应用 [ A ]. 高德利, 杨慧珠, 赵文智等编. 中国科协第 21 次“青年科学家论坛”报告文集 [ C ]. 北京: 石油工业出版社. 1997. 83 ~ 89.

[ 4 ] 章梦涛, 潘一山, 梁冰, 等. 煤岩流体力学 [ M ]. 北京: 科学出版社, 1995.

[ 5 ] Bazant Z P, Desmorat R. Size effect in fiber or bar pullout with interface softening slip [ J ]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, 120 ( 9 ): 1945 ~ 1962.

[ 6 ] 潘一山, 徐秉业, 王明洋. 岩石塑性应变梯度与 II 类岩石变形行为研究 [ J ]. 岩土工程学报, 1999, 21 ( 4 ): 472 ~ 474.

- [ 7 ] 潘一山, 袁旭东, 章梦涛. 岩石失稳破坏的应变梯度模型 [ J ]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17 ( 增 ): 760 ~ 765.
- [ 8 ] Pan Yi-shan, Zhang Yong-li, Zhang Meng-tao. The gradient plasticity theory for the failure of rock and concrete [ A ]. The Third International Conference on Materials Engineering for Resources [ C ]. Japan : Akita University, 1998. 97 ~ 104.
- [ 9 ] 梁冰, 章梦涛, 潘一山, 等. 瓦斯对煤的力学性质及力学响应影响的试验研究 [ J ]. 岩土工程学报. 1995, 17 ( 5 ): 353 ~ 359.

## THEORETICAL ANALYSIS OF RELATIONSHIP BETWEEN STRESS AND STRAIN IN CONSIDERATION OF CONFINING PRESSURE AND PORE PRESSURE OF ROCK SAMPLE

WANG Xue-bin, PAN Yi-shan

( Liaoning Technical and Engineering University, Fuxin 123000, China )

**Abstract** : Based upon shear strain gradient plastic theory of rock deformation localization, it is assumed that the failure pattern of rock in the shear band is shear failure. The confining pressure and the pore pressure are involved in the model and a theoretical stress-strain relationship is obtained. The result of the theoretical analysis coincides with many experimental results. The localization is the cause of the confining pressure and pore pressure. The theoretical analysis has theoretical and practical significance for prevention from some natural hazards.

**Key words** : strain gradient plastic theory ; shear failure ; confining pressure ; pore pressure ; localizitim