

广义平面应力条件下径向渗流的液固耦合

徐曾和 徐小荷

摘要：考虑了多孔介质渗透率随孔隙变化的特点，建立了基本方程；对于广义平面应力条件下的径向渗流问题，提出了解耦方法，并求出了耦合条件下的孔隙压力及介质应力、应变、位移的解析解。实例计算表明，耦合效应不容忽视。

关键词：液固耦合；渗透率；解耦方法；解析解

分类号：TE312 **文献标识码：**A

LIQUID-SOLID COUPLED PROBLEM OF RADIAL FLOW THROUGH POROUS MEDIA UNDER GENERAL PLAIN STRESS CONDITION

XU Zenghe, XU Xiaohe

P.O.138 Box, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110006

Abstract : Taking into account the behavior that the permeability of deformable porous media varies with their porosity, the liquid-solid problem of liquid flowing through porous media under general plain stress condition is discussed. First the governing equations are published, then a decoupled method is proposed, and the fields of pore pressure, the stresses, strains and displacement of media are derived analytically. The computation of cases indicates that there are obviously difference between the coupled analysis and non-coupled analysis.

Key words : liquid-solid couple; permeability; a decoupled method; analytical solutions

液体在饱和多孔介质中流体渗流的流固耦合作用与许多工程问题有关，是当前地质体力学研究中的重要问题之一。Biot首先研究了饱和土体中水渗流的液固耦合问题^[1,2]，以后Rice和Cleary对Biot理论作了进一步的阐述^[3]，使其具有更明确的物理意义。但他们均假设介质的渗透率为常量。本文在文献^[1,2,3]的基础上，进一步研究了渗流过程中介质渗透率的变化。文献^[4]讨论了这种情况下液固耦合的平面应变问题，此处是研究承压地层的径向液固耦合问题。本文首先提出了一种解耦方法，然后求出耦合条件下孔隙压力与介质的应力、应变、位移的解答。实例计算表明，耦合分析和非耦合分析的差别较大。

1 基本方程

在地下水和石油开采中，流体储集层常位于地下一定深度，并承受上覆地层的重力作用。这种重力可视为强度为 $h = \rho_0$ 的恒定的垂直载荷。若承压地层的厚度远小于其埋藏深度，则可认为储集层的垂直应力是常量，其值为 $\sigma_z = \rho_0$ 。此时对于含单一圆孔的液固耦合问题，可得图1的力学模型。采用极坐标，按文献^[4]本构方程和几何方程为

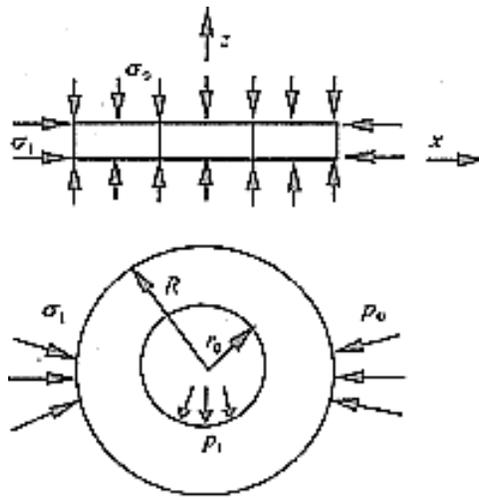


图1 力学模型

Fig.1 Mechanical model

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sigma_r}{\lambda + 2G} + p \\ z &= \frac{\sigma_z}{\lambda + 2G} + p \end{aligned} \quad (1)$$

$$n = n_0 + \Delta n, \Delta n = \frac{p}{R} - \frac{\sigma_v}{3H}, \Delta n = \frac{p}{Q} - \alpha \epsilon_v \quad (2)$$

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \epsilon_v = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z \quad (3)$$

式中 σ_r 、 σ_z 是饱和多孔介质的总应力， p 是孔隙压力， ϵ_r 、 ϵ_z 是总应变， u 是位移， ϵ_v 是体积应变， n 是瞬时孔隙率， n_0 是初始孔隙率， Δn 是孔隙改变， λ 、 G 是拉梅系数， Q 也是反映饱和多孔介质变形性质的常数。由于 $z = 0$ ，因此 ϵ_z 不独立，从式(1)中解出 ϵ_z 并代入式(3)可得

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_0 - \lambda(\epsilon_r + \epsilon_\theta) - \alpha p}{\lambda + 2G}, \epsilon_v = \frac{2G}{\lambda + 2G}(\epsilon_r + \epsilon_\theta) + \frac{\sigma_0}{\lambda + 2G} - \frac{\alpha p}{\lambda + 2G} \quad (4)$$

将式(4)代入式(1)和式(2)可得

$$\sigma_r = \frac{2G\lambda}{\lambda + 2G}(\epsilon_r + \epsilon_\theta) + 2G\epsilon_r + \frac{2G\alpha}{\lambda + 2G}p + \frac{\lambda\sigma_0}{\lambda + 2G} \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2G\lambda}{\lambda + 2G}(\epsilon_r + \epsilon_\theta) + 2G\epsilon_\theta + \frac{2G\alpha}{\lambda + 2G}p + \frac{\lambda\sigma_0}{\lambda + 2G} \quad (6)$$

$$\Delta n = \left(\frac{1}{Q} + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2G}\right)p - \frac{2G\alpha}{\lambda + 2G}(\epsilon_r + \epsilon_\theta) - \frac{\sigma_0\alpha}{\lambda + 2G} \quad (7)$$

将式(3)、(4)和式(5)、(6)代入极坐标中的平衡方程中，并考虑稳定流，则可得以位移表示的平衡方程

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right\} = - \frac{\alpha}{2(\lambda + G)} \frac{dp}{dr} \quad (8)$$

在极坐标中，稳定渗流时流体的质量守恒方程为

$$\frac{\rho q_r}{r} + \frac{d(\rho q_r)}{dr} = 0 \quad (9)$$

式中 ρ 是流体密度； q_r 是径向渗流速度，如注意到液体的压缩性很小可以忽略。按文献 [4]，对于可变形多孔介质，渗透系数，非Darcy的渗流定律和渗流连续性方程为

$$k(n) = k_0 e^{\alpha(n_0 + n)} \quad q_r = -k(n) \frac{\partial p}{\partial r} \quad \frac{d}{dr} \left[r k(n) \frac{dp}{dr} \right] = 0 \quad (10)$$

若考虑定压问题，则图1所示的边界条件为

$$\begin{cases} \sigma_r(R) = \sigma_1, \sigma_r(r_0) = 0 \\ p(R) = p_0, p(r_0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

式(8)、(10)、(11)即是所研究问题的力学模型。

2 径向固液耦合问题的解耦方法及其解答

对(8)式积分一次并注意到(3)式可得

$$\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} = \epsilon_r + \epsilon_\theta = - \frac{\alpha}{2(\lambda + G)} p + f \quad (12)$$

利用式(5)、式(6)可将 σ_r 由总应力 σ_r 和孔隙压力 p 表示，注意到边界条件式(11)可得

$$(\epsilon_r + \epsilon_\theta)|_{r=R} = \frac{(\lambda + 2G)[\sigma_1 + \sigma_\theta(R)] - 4G\alpha p_0 - 2\lambda\sigma_0}{2G(3\lambda + G)} \quad (13)$$

$$f = \frac{(\lambda + 2G)[\sigma_r + \sigma_\theta(R)] - 4G\alpha p_0 - 2\lambda\sigma_0}{2G(3\lambda + 2G)} + \frac{\alpha p_0}{2(\lambda + G)} \quad (14)$$

式中 $\sigma_\theta(R)$ 待定，故 f 也待定，但对于稳定流 $\sigma_\theta(R)$ 是常量，这样 f 是待定的常量。将(12)式和(4)式代入(2)式和(10)式可得

$$\Delta n = \left(\frac{1}{Q} + \frac{\alpha^2}{\lambda + G} \right) p - \frac{\alpha}{\lambda + G} (2Gf + \sigma_0) \quad (15)$$

$$k(n)=K_0 e^{A n}, K_0 = \exp\left[an_0 - \frac{\alpha\alpha}{\lambda + 2G}(2Gf + \sigma_0)\right], A = \alpha\left(\frac{1}{Q} + \frac{\alpha^2}{\lambda + G}\right) \quad (16)$$

将(16)式代入(10)式，并注意到 K_0 是非零的常量可以消去。这样由式(10)、(16)和式(11)可得

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r e^{Ap} \frac{dp}{dr}) = 0 \\ p(R) = p_0, p(r_0) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

式(17)已与位移 u 解耦，容易得到其解答为

$$p = \frac{1}{A} \ln\left[\frac{e^{Ap_0}}{\ln R/r_0} \ln(r/r_0)\right] \quad (18)$$

现在求耦合条件下介质的应力、应变、位移，将(12)式对 r 积分，并利用几何方程可得

$$u = -\frac{\alpha}{2(\lambda + G)} \frac{1}{r} \int_{r_0}^r p r' dr' + \frac{f}{2} \left(r - \frac{r_0^2}{r}\right) + \frac{r_0}{r} u(r_0) \quad (19)$$

$$\epsilon_r = -\frac{\alpha}{2(\lambda + G)} p + \frac{\alpha}{2(\lambda + G)} \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r p r' dr' + \frac{f}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{r_0}{r} u(r_0) \quad (20)$$

$$\epsilon_\theta = -\frac{\alpha}{2(\lambda + G)} \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r p r' dr' + \frac{f}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{r_0}{r^2} u(r_0) \quad (21)$$

式中 f 和 $u(r_0)$ 待定，将式(12)和式(19)代入式(5)可得

$$\sigma_r = \frac{G\alpha}{\lambda + G} \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r p r' dr' + Gf \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2G}\right) - \frac{2Gr_0}{r^2} u(r_0) + \frac{\lambda\sigma_0}{\lambda + 2G} \quad (22)$$

将 r_0 的边界条件式(11)代入式(2)可得

$$u(r_0) = f \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda + 2G}\right) r_0 + \frac{\lambda\sigma_0 r_0}{2G(\lambda + 2G)} \quad (23)$$

$$f = \frac{\lambda + 2G}{G(3\lambda + 2G)} \left\{ \frac{\sigma_1 R^2}{R^2 - r_0^2} - \frac{G\alpha}{(\lambda + G)(R^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^R p r' dr' - \frac{\lambda\sigma_0}{\lambda + 2G} \right\} \quad (24)$$

将式(23)、(24)代入式(22)和式(19)、(20)、(21)，并利用本构方程(6)式可得

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1 R^2}{R^2 - r_0^2} - \frac{\sigma_1 R^2 r_0^2}{r^2 (R^2 - r_0^2)} + \frac{G\alpha}{\lambda + G} \left\{ \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r p r' dr' - \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 (R^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^R p r' dr' \right\} \quad (25)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 R^2}{R^2 - r_0^2} + \frac{\sigma_1 R^2 r_0^2}{r^2 (R^2 - r_0^2)} + \frac{G\alpha}{\lambda + G} \left\{ p - \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r p r' dr' - \frac{(r^2 + r_0^2)}{r^2 (R^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^R p r' dr' \right\} \quad (26)$$

$$\epsilon_r = -\frac{\alpha p}{2(\lambda + G)} + \frac{\alpha}{2(\lambda + G)} \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r p r' dr' + \frac{f}{2} \left[1 - \left(1 + \frac{2\lambda}{\lambda + 2G} \right) \frac{r_0^2}{r^2} \right] - \frac{\lambda \sigma_0}{2G(\lambda + 2G)} \frac{r_0^2}{r^2} \quad (27)$$

$$\epsilon_\theta = -\frac{\alpha}{2(\lambda + G)} \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r p r' dr' + \frac{f}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{2\lambda}{\lambda + 2G} \right) \frac{r_0^2}{r^2} \right] + \frac{\lambda \sigma_0}{2G(\lambda + 2G)} \frac{r_0^2}{r^2} \quad (28)$$

$$u = -\frac{\alpha}{2(\lambda + G)} \frac{1}{r} \int_{r_0}^r p r' dr' + \frac{f}{2} \left[r + \left(1 + \frac{2\lambda}{\lambda + 2G} \right) \frac{r_0^2}{r} \right] + \frac{\lambda \sigma_0}{2G(\lambda + 2G)} \frac{r_0^2}{r} \quad (29)$$

式(25)、(26)、(27)、(28)和式(29)即是介质耦合的应力、应变、位移的表达式。容易看出，若令式中孔隙压力 $p=0$ ，则上述方程与经典弹性分析得到的解答一致。

3 讨论

为了进行比较，先考察有孔隙压但非耦合的情况。此时孔隙压力独立与介质的变形，在孔隙压力已知的条件下，对介质变形与平衡的影响相当于体积力。对(11)式的边界条件，按文献[4]给出的方法容易得到孔隙压力和介质的总应力为

$$p = \frac{p_0}{\ln(R/r_0)} \ln \frac{r}{r_0} \quad (30)$$

$$\sigma_r = \frac{(\sigma_1 + p_0)R^2}{R^2 - r_0^2} - \frac{(\sigma_1 + p_0)R^2 r_0^2}{r^2 (R^2 - r_0^2)} - p + \frac{\lambda + 2G}{2(\lambda + G)} \left\{ \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r p r' dr' - \frac{r^2 - r_0^2}{r_0^2 (R^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^R p r' dr' \right\} \quad (31)$$

$$\sigma_\theta = \frac{(\sigma_1 + p_0)R^2}{R^2 - r_0^2} + \frac{(\sigma_1 + p_0)R^2 r_0^2}{r^2 (R^2 - r_0^2)} - \frac{1}{2(\lambda + G)} \left\{ \lambda p + \frac{\lambda + 2G}{r^2} \int_{r_0}^r p r' dr' + \frac{(\lambda + 2G)(r^2 - r_0^2)}{r_0^2 (R^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^R p r' dr' \right\} \quad (32)$$

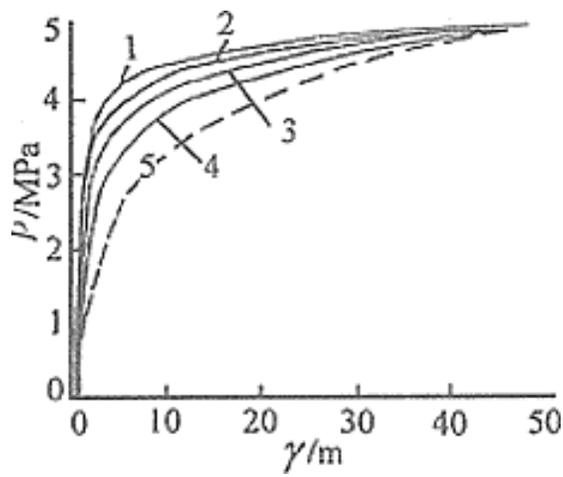


图2 耦合、非耦合的孔隙压力分布
 Fig.2 Distribution of pore pressure for coupled and uncoupled
 1.A=0.8;2.A=0.6 ; 3.A=0.4 ;
 4.A=0.2 ; 5.非耦合

从(16)式可知，当 $A \rightarrow 0$ 时， $k(n) = K_0 = \text{const}$ ，此时非线性的渗流定律(10)式也退化为线性的Darcy渗流定律，因此考虑 A 不接近于0的情况。取 $A=0.2、0.4、0.6、0.8$ ， $p_0=5\text{MPa}$ ， $r_0=50\text{cm}$ 的情况计算式(25)、(26)和式(31)、(32)可得图2。

从图2可知：(1)耦合与非耦合的孔隙压差别较大，且随着 A 的增大，即渗流的非线性程度的增大，两者的差别增大；(2)耦合的孔隙压大于非耦合的孔隙压。

按文献 [5] 提供的数据，进一步取 $\sigma_0 = 1.445 \times 10^4 \text{MPa}$ ， $G = 2.5 \times 10^4 \text{MPa}$ ， $\nu = 0.912$ ，对耦合、非耦合、及纯弹性条件下介质的应力进行对比，可得图3。

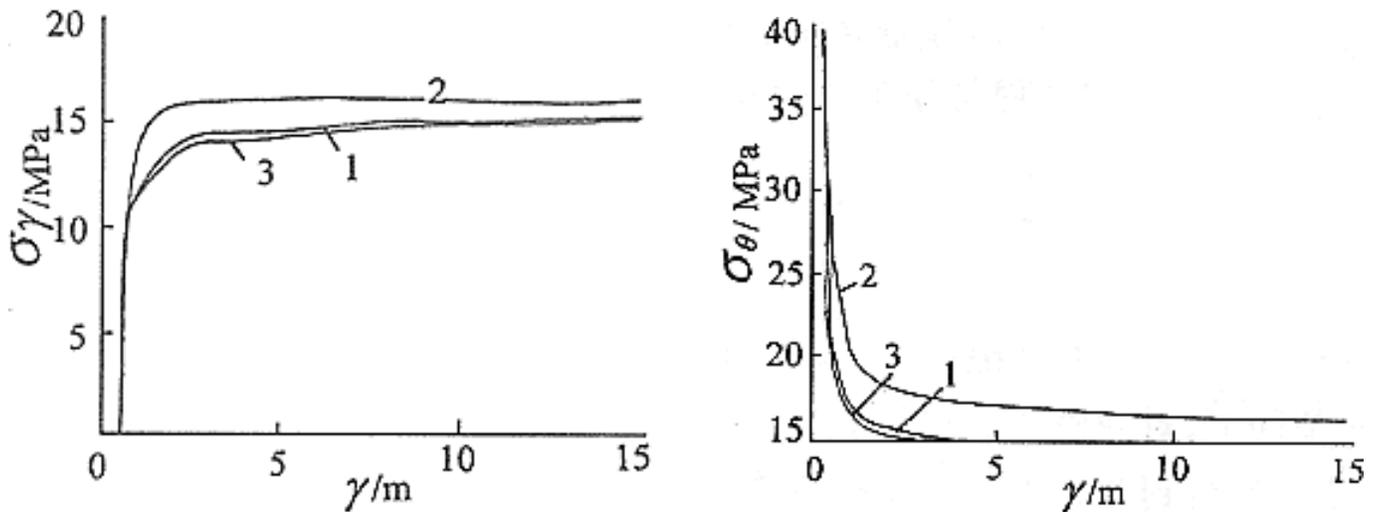


图3 耦合、非耦合与纯弹性的应力分布

Fig.3 The distribution for coupled, uncoupled and pure elastic stresses

1.耦合；2.非耦合；3.弹性

从图中可知：(1)对不同的A，耦合的径向应力与切向应力几乎重叠，即渗流的非线性程度对介质应力的影响是类似的；(2)耦合的切向应力与弹性的切向应力差别极小，耦合的径向应力与弹性的径向应力差别也不大；(3)耦合的径向应力小于非耦合的径向应力，耦合的切向应力也小于非耦合的切向应力，且耦合分析与非耦合分析得到的应力差别较大。

上述计算结果表明耦合分析与非耦合分析得到的孔隙压力与介质应力的差别都比较大，因此耦合效应不容忽视。

值得指出的是，计算中对三种不同的情况所取的拉梅系数都是一样的，而文献[5]中提供的数据是按Biot建议的方法进行试验得到的，即在孔隙压是常量情况下得到的。若对于纯弹性和非耦合条件下介质的拉梅系数是取“干”的多孔介质(既无孔隙流体的多孔介质)的数据，则计算结果与结论将有所不同。

基金项目：油气藏地质及开发工程国家重点实验室开放基金资助项目(PLN9702)

作者简介：徐曾和(1954-)，男，副教授，博士，主要从事渗流的流固耦合问题与岩石失稳破裂的研究。

作者单位：东北大学岩石破裂和失稳研究中心，辽宁 沈阳 110006

参考文献

[1] Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation [J]. J. Appl. Phys, 1941, 12: 155 ~ 164.

[2] Biot M A. The theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid [J]. J. Appl. Phys, 1954, 25: 1385 ~ 1391.

[3] Rice J R, Cleary M P. Some basic Stress diffusion solution for fluid-saturated elastic solid porous media with compressible constituents [J]. Rev. Geophys. Space. Physics, 1976, 14(2): 227 ~ 241.

[4] 徐曾和，徐小荷. 可变形多孔介质径向渗流的液固耦合问题 [J]. 面对国民经济可持续发展战略的岩石力学与岩石工程，北京：中国科学技术出版社，663 ~ 666.

[5] Kurashige M. Transient response of a fluid-saturated poroelastic layer subjected to a sudden fluid pressure rise [J]. J. Appl. Mech, 1982, 49: 492 ~ 496.

收稿日期：1998-04-15